Přednáška MA2 24. 2. 2020 – „dodatek"

Vlastní čísla a vlastní vektory matice (čtvercové)

1. „Pokus":

Je dána matice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ a vektory $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Označme L lineární zobrazení, $L: R^2 \to R^2$, jehož maticí je matice A, tj. $L(x) = A \cdot x$, $x \in R^2$.

A zkusme:

$$\left.\begin{array}{l} L\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \text{ tj. } \underline{L(v) = 2v} \\ \text{a} \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ tj. } \underline{L(w) = -3w} \end{array}\right\} (*)$$

A co nás „napadne" za otázky?

1) Jak máme rozumět (z hlediska zobrazení) tomu, co jsme dostali v (*)?

2) Jsou ještě nějaké nenulové vektory, mající tuto vlastnost, tj. $L(u) = \lambda u$ pro $\lambda \in R$(?) $(\vec{u} \neq \vec{O})$?

3) Jak lze takové vektory „najít" a k čemu jsou „dobré"?

A „odpovědi":

1) Pokud chápeme $x \to A \cdot x$ jako zobrazení (lineární), pak toto zobrazení u vektorů $\vec{v}, \vec{w}$ „ponechá" jejich směr – jen mění velikost a orientaci (v R^2)

(možná analogie se světelným spektrem)

Ad 3):

(i) Je-li matice A singulární, pak víme, že soustava lineárních rovnic $Ax = 0$ má nenulové řešení, tj. existuje vektor $\vec{v} \neq \vec{o}$ tak, že $Av = 0 . v$

(ii) a obecně:

a) **Definice**: $\lambda \in C$ (speciálně $\lambda \in \mathbb{R}$) se nazývá vlastním číslem matice A a $\vec{v} \neq \vec{o}$ vlastním vektorem matice A, příslušným vlastnímu číslu λ, když platí

$$Av = \lambda v$$

A odtud hned: Je-li $\vec{v}$ vlastní vektor, příslušný k λ, pak také $t \cdot \vec{v}$, $t \neq 0$, $t \in R$ jsou vlastní vektory, příslušné k λ.

b) „nalezení" λ a $\vec{v}$:

A - čtvercová matice řádu n, a nechť $Av = \lambda v$, $\vec{v} \neq \vec{o}$.
Pak také $Av - \lambda v = 0$ a maticově (I-jednotková matice)

$$Av - \lambda I v = 0, \text{ tj.}$$

$$(*) \qquad (A - \lambda I) v = 0, \quad a \ \vec{v} \neq \vec{o} \ !$$

A čtvercová soustava (*) má nenulové řešení $\Leftrightarrow$ když $(A - \lambda I)$ je singulární matice, tj.

$\det(A - \lambda I) = 0$ - charakteristická rovnice matice A

(tj. algebraická rovnice n-tého stupně - λ jsou její řešení)

Zde problém se řešením „rovnice n-tého stupně" –
– kořeny mohou být reálné různé, ale i vícenásobné
a i komplexní (my – jen jednoduché „příklady")

a výpočet „vlastních vektorů", pokud známe λ –
– již „snadno" řešením soustavy $(A-\lambda I)v=0$

Zkusme tedy u našeho příkladu:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}, \quad A-\lambda I=\begin{pmatrix}-2-\lambda, & 1\\ 4, & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

(i) $\det(A-\lambda I)=0 \iff (1-\lambda)(-2-\lambda)-4=0$

$$\lambda^2+\lambda-6=0$$

$$(\lambda+3)(\lambda-2)=0,$$

tj. $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-3$ jsou vlastní čísla matice A

(ii) vlastní vektory:

$\lambda_1=2$: hledáme vektor $v=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$ tak, aby $(A-2I)v=0$,

tj. $\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, tj. $-4v_1+v_2=0$,

volíme za $v_1=t$, pak $v_2=4t$, tj. $v=t\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix},\ t\neq 0$
$(t\neq 0)$

$\underline{\lambda_2 = -3}$: hledáme vektor $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ tak, aby $(A + 3I)w = 0$,

tj. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, a tedy .

$w_1 + w_2 = 0$, volíme $w_1 = t \, (\neq 0)$
pak $w_2 = -t$

a dostáváme $\underline{w = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$, $t \neq 0$

<u>Poznámka</u>: Obtížnost příkladů „na hledání" vlastních čísel a vektorů spočívá v řešení algebraických rovnic $\det(A - \lambda I) = 0$, zde - jen jednoduchý příklad

<u>A důležité „pozorování"</u>:

Vlastní vektory $\vec{v} = (1, 4)$ a $\vec{w} = (1, -1)$ jsou LNZ, tedy tvoří bázi prostoru R^2. Vyjádříme-li $\vec{x} \in R^2$

$$\vec{x} = \tilde{x}_1 \vec{v} + \tilde{x}_2 \cdot \vec{w} \quad , \; ,$$

pak

$$L(\vec{x}) = L(\tilde{x}_1 \vec{v} + \tilde{x}_2 \vec{w}) =$$

(linearita)

$$= \tilde{x}_1 L(\vec{v}) + \tilde{x}_2 L(\vec{w}) =$$

$$= 2\tilde{x}_1 \vec{v} \quad + (-3)\tilde{x}_2 \vec{w}$$

tj. $\underline{L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}}$!

A obecně: $Av = \lambda_1 v$, $Aw = \lambda_2 w$, pak,

je-li $\vec{x} = \tilde{x}_1 \vec{v} + \tilde{x}_2 \vec{w}$, je

$$L(\vec{x}) = \lambda_1 \tilde{x}_1 \vec{v} + \lambda_2 \tilde{x}_2 \vec{w}, \text{ tj. „maticově"}$$

$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \; -$$

– tedy matice zobrazení je diagonální, a vlastní čísla „jsou" diagonální prvky. Matice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \Lambda \quad - \quad \underline{\lambda\text{-matice zobrazení } L}$$

<u>Ještě jiná cesta k získání matice Λ</u>:

<u>v našem příkladu</u>: $\vec{x} \in R^2$ – $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ve „staré" bázi

a $\vec{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ v bázi $\{\vec{v}, \vec{w}\}$

Pak (transformace souřadnic):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tilde{x}_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \tilde{x}_2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \text{ tj.}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

$V = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ je regulární matice, ex. tedy V^{-1}

a je-li $L(\vec{x}) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ve „staré" bázi,

tj. $A \cdot x = y$ (i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ve „staré" bázi)

Pak, označme-li $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$; $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}$ (vyjádření $\vec{x}, \vec{y}$ vzhledem k bázi $(\vec{v}, \vec{w})$)

dostaneme: z $\quad Ax = y \quad$ a $\quad x = V\tilde{x}$

$$A(V\tilde{x}) = V\tilde{y}$$

a tedy $\quad V^{-1}A(V\tilde{x}) = \tilde{y}$

tj. $\quad (V^{-1}AV)\,\tilde{x} = \tilde{y}$

– matice zobrazení v „bázi" vlastních vektorů je $\tilde{A}$,

$$\underline{\tilde{A} = V^{-1}AV}$$

a $\quad \det \tilde{A} = \det V^{-1} \cdot \det A \cdot \det V = \det A$

(neboť $\det V^{-1} \cdot \det V = 1$)

A v našem příkladu „vyjde" $\underline{\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}$:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{a} \quad \tilde{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

<u>tedy opět</u> $\quad \underline{\underline{L\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}}}$